Mathématiques en technologies de l'information

Plan du cours

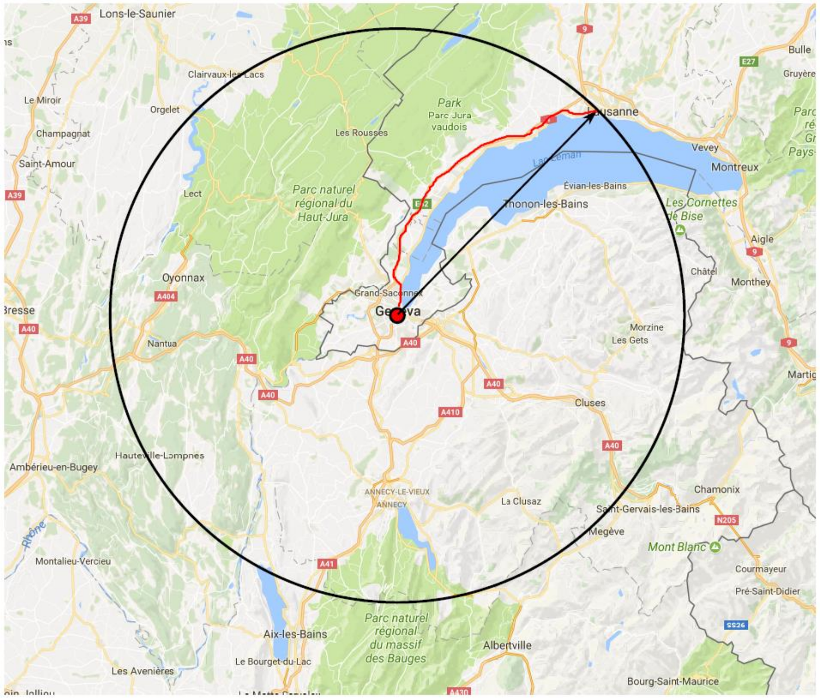
- Ch. 1 Calcul vectoriel
- Ch. 2 Suites et Séries
- Ch. 3 Systèmes d’équations

<u>Evaluation:</u> Moyenne arith. 3 travaux pratiques notés

Chapitre 1
Calcul vectoriel

Exemple d’espace vectoriel

Une carte géographique

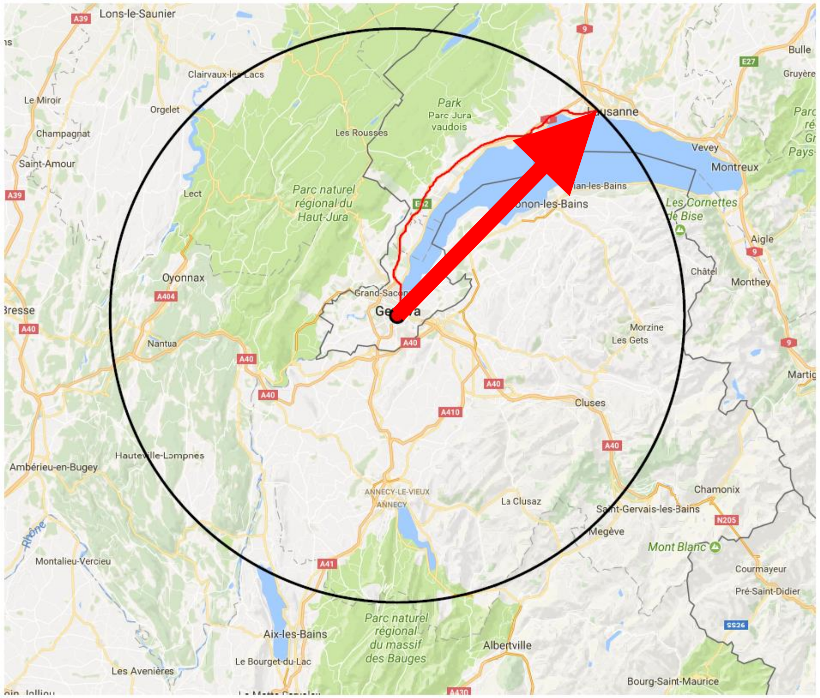


<u>Question :</u>
Peut-on déterminer la destination avec uniquement le point de départ et la distance ?

Exemple d'espace vectoriel

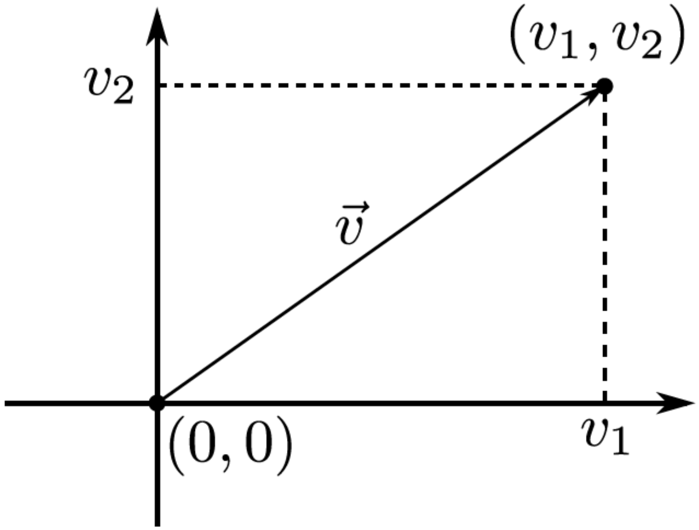
<u>**Réponse :**</u>
Non, il nous faut encore une ***<u>direction</u>****.*

Cette direction est appelée un ***<u>vecteur</u>***.



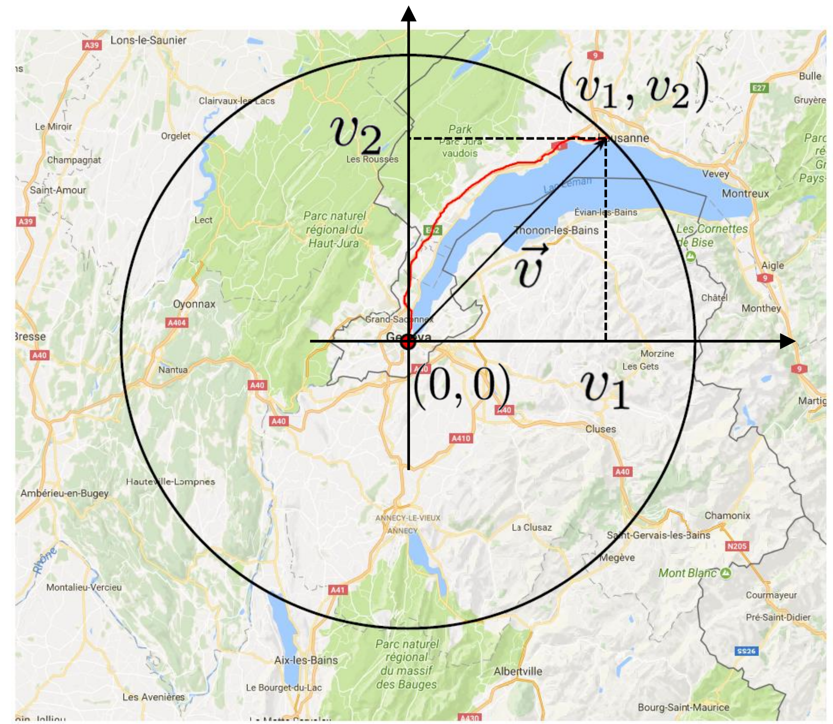
Notation vectorielle en 2 dimensions

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \qquad v_1, v_2 \in \mathbb{R}$$

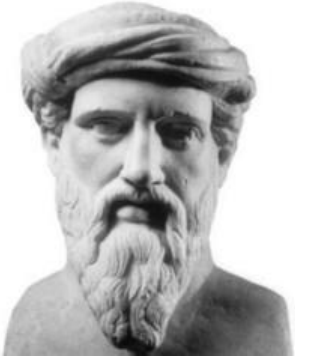


Exemple d'espace vectoriel

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \qquad v_1, v_2 \in \mathbb{R}$$



Théorème de Pythagore



La longueur du vecteur est appelée la ***norme*** du vecteur et se note comme suit

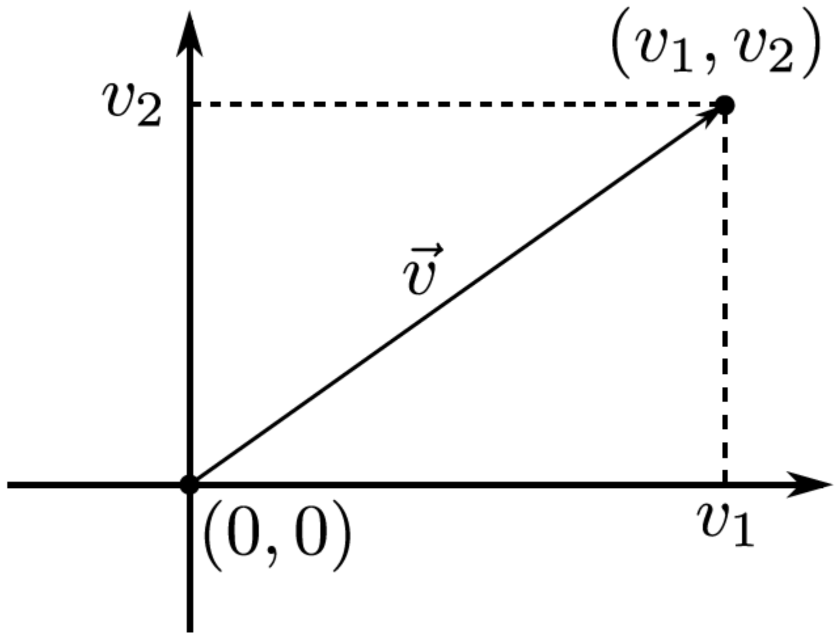
$$||\vec{v}||$$

et se calcule par $$||\vec{v}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

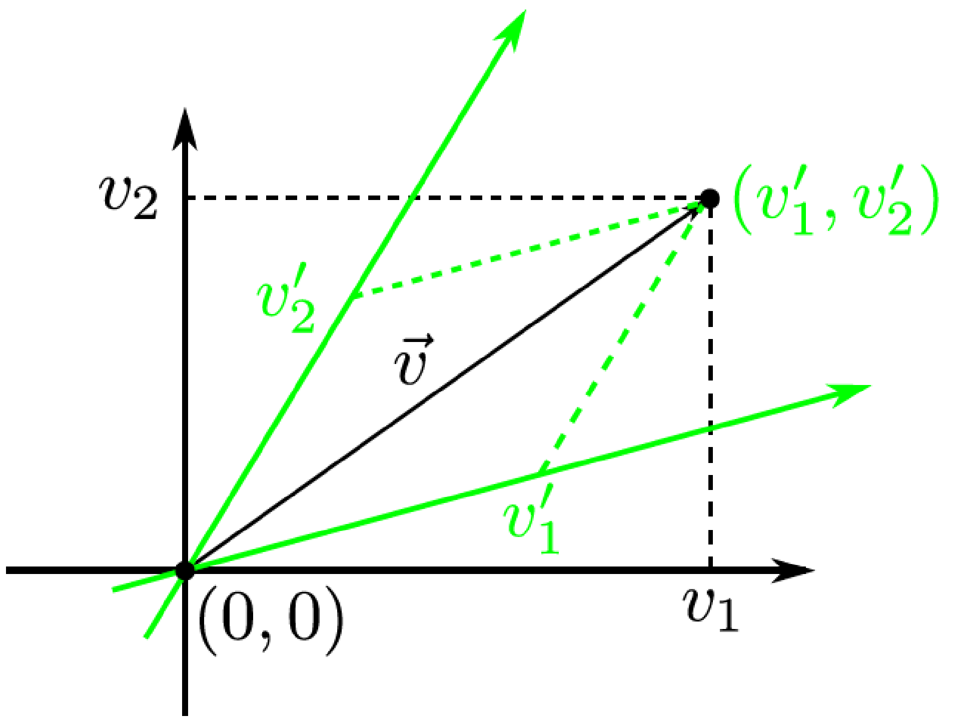
Base vectorielle

L’espace vectoriel est exprimé en fonction de sa ***base***, ou, pour le plan cartésien, les axes.

Base catésienne



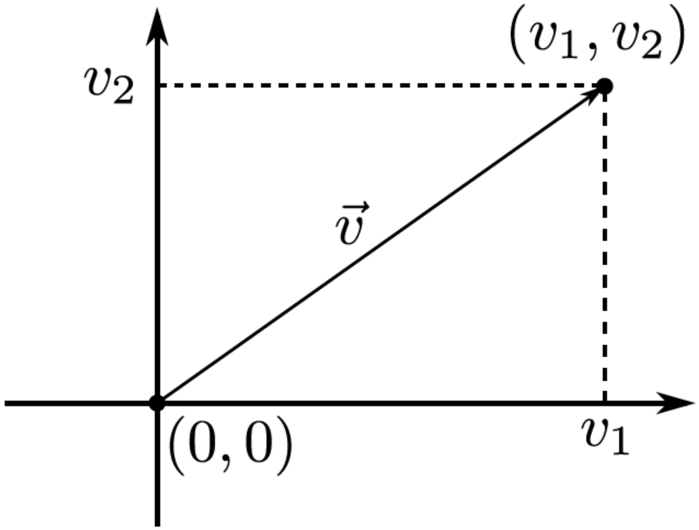
Base non-catésienne



Espace vectoriel à 2 dimensions

$$\vec{v} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \qquad v_1, v_2 \in \mathbb{R}$$



Espace vectoriel à *n* dimensions

$$\vec{v} \in \mathbb{R}^n \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad v_i \in \mathbb{R},\ \forall i$$

Sous-espaces vectoriels

Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ un sous-ensemble, alors on exprime le sous-espace vectoriel par

$$\vec{v} \in D^n \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad v_i \in D\,,\ \forall i$$

Exemple bien connu ?

Quel est l’espace vectoriel
généré par .

$$D^{32} = \{0, 1\}^{32}$$

L'addition de vecteurs

L'addition de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donne un troisième vecteur $\vec{w}$ et s'écrit

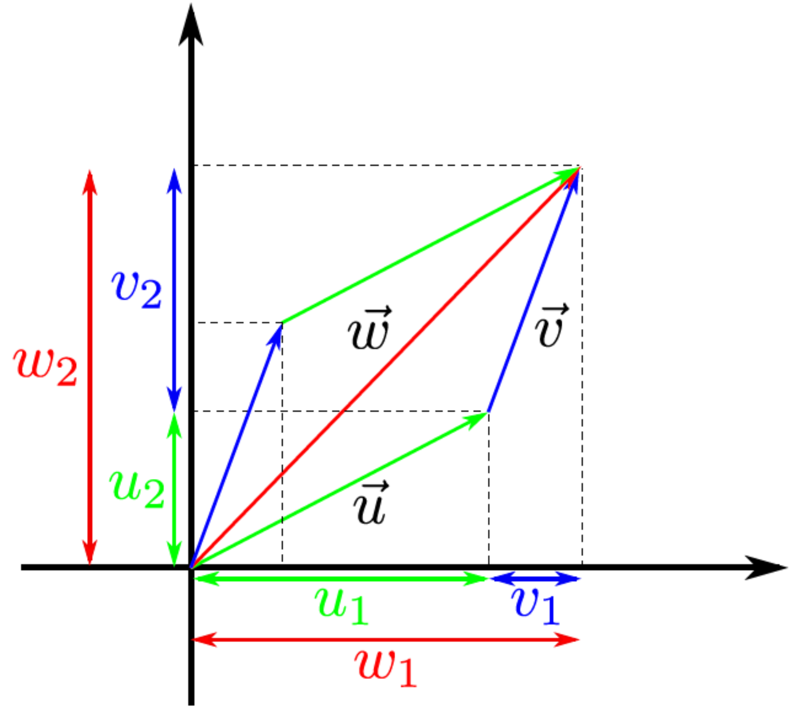
$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}.$$

Attention aux dimensions !

Seuls des vecteurs de même dimension peuvent être additionnés !

Illustration en 2 dimensions

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}$$



Addition de vecteurs à *n* dimensions

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$$

Exercice d’addition dans $\{0,1\}^8$

Quels est le résultat de la somme XOR des vecteurs suivants

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = ?$$

Multiplication par un scalaire

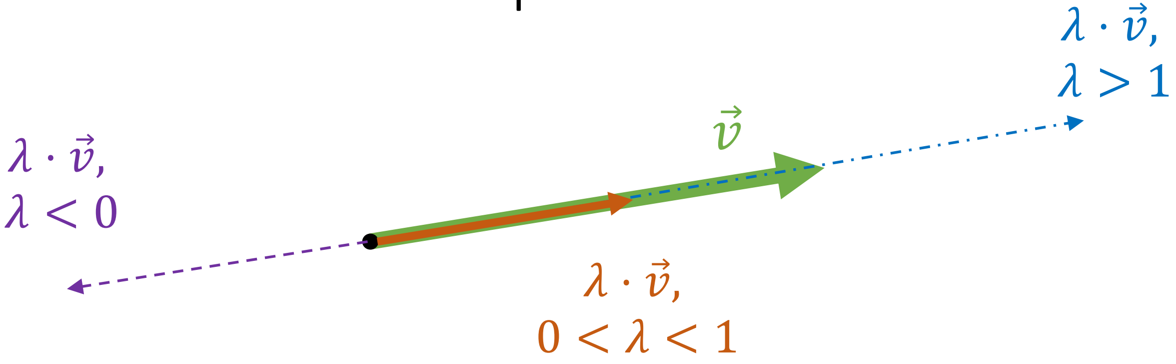
La multiplication d'un vecteur $\vec{u}$
par un *scalaire* $\lambda \in \mathbb{R}$
est défini par

$$\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \lambda \cdot v_2 \end{pmatrix}$$

Note

- La dimension du vecteur résultant est la même que le vecteur d'origine,

- La multiplication scalaire allonge / raccourci ou inverse le vecteur multiplié



Généralisation de la multiplication scalaire

$$\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot v_n \end{pmatrix} \text{ pour } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

Exercice

Démontrez le résultat suivant

Si $$\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}$$

Alors $$\|\vec{u}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{v}\|$$

Propriétés des opérateurs vectoriels

L'opérateur *somme* $+: \ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \ \mathbb{R}^n$ est

- ***Interne***
  la somme de deux vecteur de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ reste dans $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$

- ***Commutative***
  $$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

- ***Associative***
  $$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

- Possède un ***élément neutre*** $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ tel que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

- ***Inversible***
  pour tout vecteur $\vec{v}$, il existe un élément ***opposé*** $\vec{u} = -\vec{v}$ tel que
  $$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$$

<u>Propriétés des opérateurs vectoriels</u>

L'opérateur *multiplication scalaire* $\cdot$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est

- ***<u>Externe</u>***
  la multiplication d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$ par un scalaire dans $\mathbb{R}$ reste dans $\mathbb{R}^n$

- ***<u>Distributive selon la somme à gauche</u>***
  $$\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$$

- ***<u>Distributive selon la somme à droite</u>***
  $$(\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$$

- ***<u>Associative selon la multiplication</u>***
  $$(\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u})$$

- Possède un ***<u>élément neutre</u>*** 1 tel que $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Exercices

Montrez, avec des vecteurs à 3 dimensions, que la somme est

- ***Commutative***

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

- ***Associative***

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

- Possède un ***élément neutre*** $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ tel que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

- ***Inversible***

  pour tout vecteur $\vec{v}$, il existe un élément ***opposé*** $\vec{u} = -\vec{v}$ tel que

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$$

Exercices

Montrez, avec des vecteurs à 3 dimensions, que la multiplication scalaire est

- ***Distributive selon la somme à gauche***

$$\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$$

- ***Distributive selon la somme à droite***

$$(\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$$

- ***Associative selon la multiplication***

$$(\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u})$$

- $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Espace vectoriel – généralisation

Soit K un ensemble muni

d'une *addition* $+ : K \quad \to K$ et

d'une *multiplication* $\cdot : \; K \to K$

Alors K est appelé un ***corps commutatif***, et ses éléments sont appelés ***scalaires***.

Espace vectoriel – généralisation II

Soit K un corps commutatif, alors ***l'espace vectoriel*** V de dimension n engendré par K est défini comme

$$V = K^n = \{(v_1, \dots, v_n) | v_i \in K, i = 1, \dots, n\}.$$

De plus, V est muni

de l'*addition* $+ : V \times V \to V$ et

de la *multiplication scalaire* $\cdot : K \times V \to V$

Les éléments de V sont appelés des ***vecteurs***.

Remarques

La *somme* est :

- ***Associative,***
- ***Commutative,***
- ***Possède un élément neutre,***
- ***Est inversible.***

La *multiplication scalaire* est :

- ***Associative,***
- ***Distributive à gauche et à droite,***
- ***Possède un élément neutre.***

Exemples d'espaces vectoriels

- L'ensemble des réels $\mathbb{R}^n$,
- L'ensemble des entiers $\mathbb{Z}^n$,
- L'ensemble binaire $\{0, 1\}^n$,
- L'espace des fonctions réelles $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muni de la somme et de la multiplication scalaire suivants, avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R},$$

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Combinaison linéaires

La combinaison linéaire d'un espace vectoriel $V = K^n$ sur un corps commutatif K est définit comme suit:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \vec{v}_i = \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \ ... + \lambda_k \cdot \vec{v}_k$$

Avec

$$\lambda_i \ \in K, \vec{v}_i \in K^n \ \forall \ i = 1, ... k$$

Dépendance linéaire de vecteurs

Deux vecteurs $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \in V = K^n$ sont dits ***linéairement dépendants*** s'il existe un scalaire non-nul $\lambda \in K$ tel que

$$\lambda \cdot \vec{v}_1 = \vec{v}_2.$$

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \in V = K^n$ sont dits ***linéairement indépendants*** s'il n'existe aucun scalaire $\lambda \in K$ non-nul tel que

$$\lambda \cdot \vec{v}_1 = \vec{v}_2.$$

Familles libres et liées

Une famille de vecteurs $\{\vec{v}_i\}_{i=1}^{k} \in V = K^n$ est appelée une ***famille liée*** s'il existe un ensemble de scalaires non-nuls $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k \,|\lambda_i \in K, \forall\, i = 1, \dots, k\}$ tel que

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \vec{v}_i = \vec{0}$$

A l'inverse, la famille est une ***famille libre*** si elle n'est pas liée, donc s'il n'existe aucune combinaison linéaire non-nulle tel que le produit scalaire donne le vecteur nul.

Base d’un espace vectoriel

Une famille de vecteurs $B = \{\vec{b}_i\}_{i=1}^{n} \in V = K^n$ est appelée une ***base*** de V si la famille est libre.

Propriété fondamentale de B:
Pour tout vecteur $\vec{v} \in V$, il existe une combinaison linéaire telle que

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{b}_i$$

En d’autres termes, B génère l’espace vectoriel V.